14/10/19

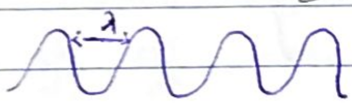
"Γραμμικά κ. μη Γραμμικά κύματα" (Χωρίκης)

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ένα κύμα είναι ένα χρονικά μεταβαλλόμενο φαινόμενο κ. συνήθως χαρακτηρίζεται από μία εξίσωση με μερικές παραμέτρους. Χαρακτηρίζονται από τη διάδοση τόσο στο χώρο όσο κ. στο χρόνο

Είδη κυμάτων (Εφαρμογές)

- Ακουστικά
- Ηλεκτρομαγνητικά (φως)
- Βαρυτικά
- Σεισμικά
- Tsunamis (υδάτινα)
- Κύματα De Broglie

Μήκος κύματος: $\lambda = \frac{h}{m v}$ ← ταχύτητα , $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J · sec (σταθ. Plank)



ΠΑΡΑΔ

• Αβαθή ύδατα: Εξίσ. Korteweg - de Vries (kdV)

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Σε μια Δ.Ε. πάντα κοιτάω πρώτα την τάξη

• Βαθιά ύδατα: $i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0$

$$|u|^2 = u\bar{u}$$

Γραμμικά ή μη γραμμικά : Η αρχή της υπέρθεσης

Βασική διαφορά στα γραμμ. κ' μη γραμμ. είναι η αρχή της υπέρθεσης, δηλ. :

Στα γραμμ. κυμ. (ή σε γραμμικές εξισ.)
$\forall$ λύσεις u_1 κ' u_2, $u_1 \neq u_2$, κ' η
$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ είναι επίσης λύση.

Στις μη γραμμ. αυτό ισχύει μόνο για ειδικές περιπτώσεις

Οδεύοντα κύματα (travelling waves)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(0, x) = f(x)$$

$$\xi = x - ct$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -cu' \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = u' \end{aligned}\right\} \to \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -cu' + cu' = 0$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, t) &= u(\xi) = u(x - ct) \\ t = 0 &\Rightarrow u(x) = f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(x, t) = f(x - ct)$$

Αν θεωρήσω περισσότερες διαστάσεις ?

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ορίζουμε ως οδεύοντα κύματα λύσεις που κινούνται με σταθ. ταχύτητα κ' διατηρούν το σχήμα τους

Παρ.: $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \Rightarrow -cu' + uu' + u''' = 0$

$\xi = x - ct$

Αναζητώ οδεύοντα κύματα κ' μετατρέπω την PDE (partial differential equation) σε ODE (ordinary -||- -||-)

ΠΑΡΑΔ.:

Εξίσωση κύματος: $\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2u}{dt^2} = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$u(0,x) = f(x)$$

$$\frac{du}{dt}(0,x) = g(x)$$

Αναζητώ λύσεις οδεύοντος κύματος: $\xi = x - At$ σταθερά

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} = -Au'$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) = A^2u''$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = u'$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u''$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2u}{dt^2} = u'' - \frac{A^2}{c^2}u'' = u''\cdot\left(1 - \frac{A^2}{c^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'' = 0 \Rightarrow u = c_1\xi + c_2 = c_1(x - At) + c_2 \\ 1 - \frac{A^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \boxed{A^2 = c^2} \Rightarrow \begin{cases} A = c \\ A = -c \end{cases} \end{cases}$$

Η $u'' = 0 \Rightarrow u = c_1(x - At) + c_2$ δεν ικανοποιεί τις

→

γενικές αρχικές συνθήκες:

$$u(0,x) = f(x) \Rightarrow c_1 x + c_2 = f(x)$$

$$\frac{du}{dt}(0,x) = -Ac_1 = g(x)$$

Άρα η λύση απορρίπτεται (η $u''=0$)

$\xi = x - At$

$$\begin{cases} \xi_1 = x - ct \\ \xi_2 = x + ct \end{cases}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης $u(x,t) = V(\xi_1) + W(\xi_2)$

$= V(x-ct) + W(x+ct)$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} - \frac{1}{c}\cdot\frac{du}{dt} = 0$$

<u>Αρχικές συνθήκες</u>: $\begin{cases} u(0,x) = f(x) \\ \frac{du}{dt}(0,x) = g(x) \end{cases}$

$$V(x) + W(x) = f(x)$$

$$-cV'(x) + cW'(x) = g(x)$$

$$-V(x) + W(x) = \frac{1}{c}\cdot\underbrace{\int g(x)\,dx}_{G(x)}$$

$$V(x) + W(x) = f(x)$$

$$V(x) - W(x) = -\frac{1}{c}G(x)$$

$$\downarrow$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(f - \frac{1}{c}G\right)$$

$$W(x) = \frac{1}{2}\left(f + \frac{1}{c}G\right)$$

Η λύση $\boxed{u(x,t) = V(x-ct) + W(x+ct)}$ D' Alambert

$\xi = x - At$

$$\begin{cases} \boxed{\xi_1 = x - ct} \\ \boxed{\xi_2 = x + ct} \end{cases}$$

χαρακτηριστικές (characteristics)

• **Σχέση διασποράς (dispersion relation):**

Θεωρώ την εξίσωση

$$\frac{du}{dt} + c \cdot \frac{du}{dx} + \varepsilon \cdot \frac{d^3u}{dx^3} = 0$$

Αναζητώ λύσεις $u = u(x-ct) = u(\xi)$

$$\frac{du}{dt} = -cu'$$

$$\frac{du}{dx} = u'$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = u'''$$

$$\frac{du}{dt} + c \cdot \frac{du}{dx} + \varepsilon \cdot \frac{d^3u}{dx^3} = -cu' + cu' + \varepsilon u''' = 0$$

$$\Rightarrow u''' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u = c_1 \xi^2 + c_2 \xi + c_3}$$

Αρχική συνθήκη:

$$u(0, x) = f(x) \Rightarrow \boxed{f(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3}$$

Επιπλέον απαιτώ $\lim_{|x| \to \infty} u(x,t) = 0$

$$\frac{du}{dt} + c \cdot \frac{du}{dx} + \varepsilon \cdot \frac{d^3u}{dx^3} = 0$$

Θεωρώ λύσεις της μορφής $e^{i(kx - \omega t)}$. Αντικαθιστώ

$$-i\omega + cik - \underbrace{i}_{(i)^3}\varepsilon k^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \varepsilon k^3 - ck}$$ σχέση διασποράς

$$\Downarrow$$

• Ορίσαμε μία ταχύτητα $v = \frac{\omega}{k}$ κ' την καλούμε ταχύτητα φάσης (phase velocity) κ' ορίζουμε επιπλέον την ταχύτητα ομάδος $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ (group velocity)

Μια Δ.Ε. καλείται εξίσωση διασκορπισμού (dispersive) αν $\omega(k) \in \mathbb{R}$ και $\frac{d^2\omega}{dk^2} \neq 0 \quad \forall k$

Η εξίσωση $\frac{du}{dt} + c \cdot \frac{du}{d} + \varepsilon \cdot \frac{d^3u}{dx^3} = 0$ είναι γραμμική!!

Απλ. η λύση $e^{i(kx-\omega t)}$, $\omega = \varepsilon k^3 - ck$ ισχύει $\forall k$!
Η γενική λύση της εξίσωσης θα πρέπει να είναι ένα άθροισμα όλων των μερικών λύσεων $\forall k$
__Άρα:__ αν $u(0,x) = f(x)$ γενική λύση της εξίσ. είναι

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \cdot e^{i \cdot (kx - \omega(k) t)} \, dk$$

$$\left.\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} \, dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \cdot e^{ikx} \, dx \end{aligned}\right\} \text{Μετασχημ. Fourier}$$